曲げ剛性などの変化する棒の横振動

高　橋　　　伸

工学部機械工学科

本論文は曲げ剛性，断面積，密度，軸圧縮力等が一次元的に変化する一端固定の棒の解を求めた。之等曲げ剛性等の量が軸方向の座標の多項式であらわされる場合について級数解を示した。方法は積分方程式の解を求め，他端の条件によって二個の常数に対する連立二元一次同次方程式を定め，この二個の常数が常には零でないことから振動数方程式を求める方法である。尚，振動数を零に等しいとおけば座屈荷重も求まる。積分方程式より求めるので近似度は割合高い。数値例として曲げ剛性のみが座標の二次式で変化する場合の振動数，座屈荷重を求めた。

1. 振動方程式の解

棒の軸方向に x，振動方向に y の二座標をとり，原点を左端とし，この点は固定端とする。右端は自由，単純支持または固定とする。曲げ剛性，断面積，密度，軸圧縮力（軸張力のときは負の値をとる）は皆xのみの関数とし，それぞれ $B(x)$，$G(x)$（断面積に密度をかけたもの）$S(x)$ であらわすものとする。時間を t，円振動数を p とし，無次元振動数 λ，無次元軸圧縮力 μ を次のように定義する。

$$\lambda = p^2 G_0 l^4 / B_0 \ , \quad \mu = S_0 l^2 / B_0$$

但し，B_0，G_0，S_0 は代表的な曲げ剛性，断面積に密度をかけたもの，軸圧縮力とする。棒の横振動の式は

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[B(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + S(x)y\right] = -G(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

振動を調和振動と仮定して下のようにおく

$$y = X(x)\,[A\sin pt + B\cos pt]$$

横振動の式は次のようになる。

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[B(x)\frac{d^2X}{dx^2} + S(x)X(x)\right] = p^2 G(x)X(x) \tag{1}$$

固定端の境界条件は　$$X(o) = \left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=o} = 0 \tag{2}$$

また　$$B(x)\frac{d^2X}{dx^2} = Z(x), \quad \left.\frac{dZ}{dx}\right|_{x=o} = k_1\,, \quad Z(o) = k_2 \tag{3}$$

とおくと，(1)式を二度積分し，(2)式，(3)を用いると次式が求まる。

$$Z(x)+S(x)X(x) - k_1 x - k_2 = p^2\int_0^x G(z)\,X(z)\,(x-z)\,dz \tag{4}$$

(3)式より　$$X(x)=\int_0^x \frac{Z(z)}{B(z)}(x-z)\,dz \tag{5}$$

(4)式，(5)式より

$$\left.\begin{aligned} &Z(x)+\int_0^x Z(z)\,K(x.z)\,dz = k_1 x + k_2 \\ &K(x.z)=\frac{1}{B(z)}\left[S(x)(x-z)-p^2\int_z^x G(\lambda)(x-\lambda)(\lambda-z)d\lambda\right] \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

今 $\phi_o = k_1x + k_2$

$$\left.\begin{aligned} &\xi_n(x)=\int_0^x \frac{\phi_n(z)}{B(z)}(x-z)\,dz \\ &\phi_{n+1}(x)=p^2\int_0^x \xi_n(z)\,G(z)(x-z)\,dz - S(x)\,\xi_n(z) \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$$

とおくと　(6)式の解は次のようになる。

$$Z(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n(x) \qquad \text{従って} \quad X(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n(x) \tag{8}$$

$X(x)$ と $Z(z)$ とが解かれば他端 $x=l$ の条件を代入，k_1，k_2 が常には零でない条件から振動数方程式が求まる。

2．曲げ剛性などが x の多項式の場合

今次のごとくおく。

$$P_{2m}(a,\ b,\ c,\ \cdots\cdots,\ h) = 1/(a+1)(a+2)(a+b+3)(a+b+4)(a+b+c+5)(a+b+c+6)\cdots\cdots(a+b+c+\cdots\cdots+h+2m-1)(a+b+c+\cdots\cdots+h+2m)$$

ただし a，b，c，……，h の個数を m とする。

$G(\mathbf{x})$，$B(x)$，$S(x)$ が xの多項式で表わされるとして，次のようにおく。

$$\frac{1}{B(x)}=\frac{1}{B_o}\cdot\sum a_n\,x^n,$$

$$G(x)=G_o\sum_q b_q\,x^q$$

$$S(x)=S_o\sum_s C_s x^s$$

上記 x は今迄の x を長さ l で割った無次元の量とする。このとき

$$\phi_o = k_1lx + k_2$$

$$\xi_m(x)=\frac{l^2}{B_o}\int_0^x \phi_m(z)\left[\sum_n a_n\,z^n\right](x-z)\,dz$$

$$\phi_{m+1}(x) = p^2 G_0 l^2 \int_0^x \xi_m(z) \left[\sum_q b_q z^q\right] (x-z)\, dz$$

$$- S_o \left[\sum_s C_s x^s\right] \xi_m (x)$$

$$m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$$

で　一般に　$\phi_m = \alpha_m k_2 + \beta_m k_1 l$

$$\xi_m = \alpha_m' k_2 + \beta_m' k_1 l$$

とおくことが出来る。この α, β は計算の結果次のようになる。

$$\alpha_0 = 1,$$

$$\alpha_0' = \frac{l^2}{B_0} \sum a_1 x^{n_1+2} P_2(n),$$

$$\alpha_1 = \lambda \sum a_1 b_1 x^{n_1+q_1+4} P_4(n_1, q_1) - \mu \sum a_1 c_1 x^{n_1+s_1+2} P_2(n_1),$$

$$\alpha_1' = \frac{l^2}{B_0} \lambda \sum a_1 a_2 b_1 x^{n_1+q_1+n_2+6} P_6(n_1, q_1, n_2)$$

$$- \frac{l^2}{B_0} \mu \sum a_1 a_2 c_1 x^{n_1+s_1+n_1+4} P_4(n_1, s_1+n_2),$$

$$\begin{aligned}\alpha_2 = {} & \lambda^2 \sum a_1 a_2 b_1 b_2 x^{n_1+q_1+n_2+q_2+8} P_8(n_1, q_1, n_2, q_2) \\ & - \lambda\mu \sum a_1 a_2 c_1 b_1 x^{n_1+s_1+n_2+q_1+6} P_6(n_1, s_1+n_2, q_1) \\ & - \lambda\mu \sum a_1 a_2 b_1 c_1 x^{n_1+q_1+n_2+s_1+6} P_6(n_1, q_1, n_2) \\ & + \mu^2 \sum a_1 a_2 c_1 c_2 x^{n_1+s_1+s_2+4} P_4(n_1, s_1+n_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_2' = {} & \frac{l^2}{B_0} \lambda^2 \sum a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 x^{n_1+q_1+n_2+q_2+n_3+10} P_{10}(n_1, q_1, n_2, q_2, n_3) \\ & - \frac{l^2}{B_0} \lambda\mu \sum a_1 c_1 a_2 b_1 a_3 x^{n_1+s_1+n_2+q_1+n_3+8} P_8(n_1, s_1+n_2, q_1, n_3) \\ & - \frac{l^2}{B_0} \lambda\mu \sum a_1 b_1 a_2 c_1 a_3 x^{n_1+q_1+n_2+s_1+n_3+8} P_8(n_1, q_1, n_2, s_1+n_3) \\ & + \frac{l^2}{B_0} \mu^2 \sum a_1 c_1 a_2 c_2 a_3 x^{n_1+s_1+n_2+s_2+n_3+6} P_6(n_1, s_1+n_2, s_2+n_3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_3 = {} & \lambda^3 \sum a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 x^{n_1+q_1+n_2+q_2+n_3+q_3+12} P_{12}(n_1, q_1, n_2, q_2, n_3, q_3) \\ & - \lambda^2\mu \left[\begin{aligned} & \sum a_1 c_1 a_2 b_1 a_3 b_2 x^{n_1+s_1+n_2 q_1+n_3+q_2+10} P_{10}(n_1, s_1+n_2, q_1, n_3, q_2) \\ & + \sum a_1 b_1 a_2 c_1 a_3 b_2 x^{n_1+q_1+n_2+q_2+10} P_{10}(n_1, q_1, n_2, s_1+n_3, q_2) \\ & + \sum a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 c_1 x^{n_1+q_1+n_2+q_2+n_3+s_1+10} P_{10}(n_1, q_1, n_2, q_2, n_3) \end{aligned}\right] \\ & + \lambda\mu^2 \left[\begin{aligned} & \sum a_1 c_1 a_2 c_2 a_3 b_1 x^{n_1+s_1+n_1+s_2+n_3+q_1+8} P_8(n_1, s_1+n_2, s_2+n_3, q_1) \\ & + \sum a_1 c_1 a_2 b_1 a_3 c_2 x^{n_1+s_1+n_2+q_1+n_3+s_2+8} P_8(n_1, s_1+n_2, q_1, n_3) \\ & + \sum a_1 b_1 a_2 c_1 a_3 c_2 x^{n_1+q_1+n_2+s_1+n_3+s_2+8} P_8(n_1, q_1, n_2, s_1+n_3) \end{aligned}\right] \\ & - \mu^3 \sum a_1 c_1 a_2 c_2 a_3 c_3 x^{n_1+s_1+n_2+s_2+n_3+s_3+6} P_6(n_1, s_1+n_2, s_2+n_3),\end{aligned}$$

等である。ここに a_1，a_2 等は a_{n1}，a_{n2} 等の略記で，a_n のとり得るすべての値をとる。記号 $\sum$ はこれ等の値のすべてについて加算することを表わす。

一般に $a_m(x)$ の $\lambda^{m-k}(-\mu)^k$ $(k=0,1,2,\cdots\cdots,m)$ の係数は

$$a_1 \_\ a_2 \_\ a_3 \_\ \cdots\cdots \_\ a_m \_$$

の下線の部分に

$$b_1,\ b_2,\ \cdots\cdots,\ b_{m-k};\ c_1,\ c_2,\ \cdots\cdots,\ c_k$$

を入れるあらゆる組合せ（但し同じ b でも添数の大きいものは添数の小さいものの右側に入る。c についても同様）を $\sum$ の次にかき，x の巾は上記の文字を皆加えたものに $2m-2k$ を加えたもので，P_{2m-2k} のかっこの中は

$$n_1 \_\ n_2 \_\ n_3 \_\ \cdots\cdots \_\ n_m \_$$

の下線の部分に上記の b，c に相当した q，s を入れ，n の前に s があればその s と n は ＋ で結び，最後に s があれば，それを消して，あとは各々の間にコンマを打ったもので，之等 a，b，c のかけあわせと x の巾と P との三つをかけたものが上記の係数になる。α'_m は a_m の各項に a を一つの余分にかけ，巾を $n+2$ ふやし，Pの中に n を一つ余分につけたものに l^2/B_0 をかければよい。

β_m，β'_m はα_m，α'_m の n_1 の代り n_1+1 を用いればよい。

かくして ϕ_m，ξ_m が求まると，振動方程式の解は級数の形で求まる。この級数は収束がよく，振動数方程式を求める場合は数項で充分正しい結果が得られる。また実際の計算にあたっては，n，q，s の小さい値の時ほど λ，μ の係数が大きいことを考慮すると，あらゆる組合せを計算せずに n，q，s の小さい時のみを計算して充分正しい結果を得る。具体例を数値計算例の所に示してある。

かくして ϕ，ξ が求まると，他端の条件から振動数方程式が求まる。例えば他端も固定の場合は

$$\sum \xi_m(1) = \sum \xi'_m(1) = 0 \quad \left(\frac{d\xi}{dx} = \xi' \quad \text{とする}\right)$$

より

$$k_1 f_1(\lambda,\mu) + k_2 f_2(\lambda,\mu) = 0$$
$$k_1 g_1(\lambda,\mu) + k_2 g_2(\lambda,\mu) = 0$$

の形の式が求まり

$$\begin{vmatrix} f_1(\lambda,\mu) & f_2(\lambda,\mu) \\ g_1(\lambda,\mu) & g_2(\lambda,\mu) \end{vmatrix} = 0$$

より λ が求まる。ここに f, g は λ，μ の整次多項式である。座屈は振動数が零になった極限と考えられるので，上式で $\lambda=0$ としたときの μ の値が座屈荷重をあたえる。

3. 数　値　例

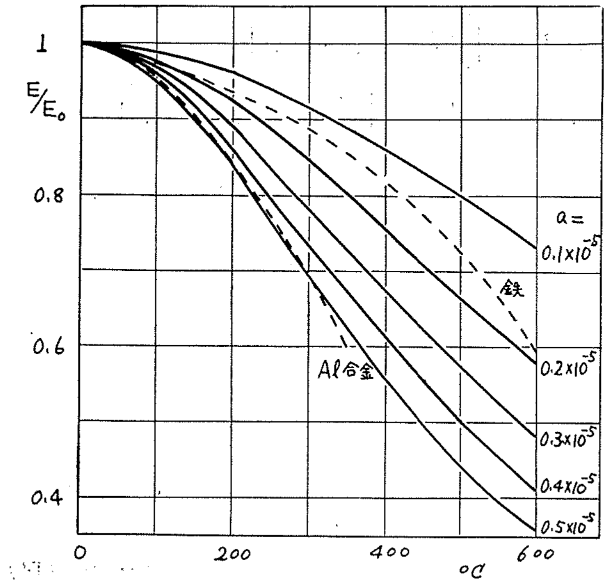
今曲げ剛性のみが変化して，$G(x)$ や $S(x)$ が一定の場合を考える。

$$B(x) = E_0 I/(1+ax^2)$$

の場合を例にとる。例えば，棒の温度が，一端零度他端 β 度で線型分布（任意点の温度は βx）であらわされ，また縦弾性係数が

$$E = E_0/(1+aT^2)$$

であらわされるとき，$a\beta^2 = \alpha$ とおいた場合である。 E/E_0 と T_0 C との関係を図示したものが第１図で，鉄の場合は縦弾性係数のデーターがないので，横弾性係数の変化を参考として示した。(1)



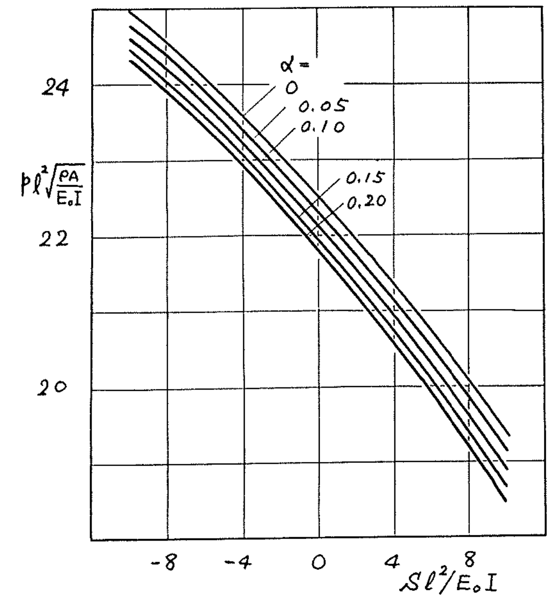
第　1　図

境界条件としては最も収束の悪い他端固定の場合を考えた。$|\mu| < 15$ の場合は $\xi_4(x)$ までとれば誤差は１%以下である。他の境界条件の場合はもっと収束がよく，例えば他端自由の場合は， μ の同じ範囲で，ϕ_4 までの５項をとると，第２次振動数が１%以下の誤差で求まる。

数値計算において，例えば $\xi_3(x)$ の $-\dfrac{l^2}{B_0} k_2 \lambda^2 \mu x^{16}$ を考えると，それは下の様になる。

$$\sum a_1 a_2 a_3 a_4 b_1 b_2 c_1 \quad x^{n_1+n_2+n_3+n_4+q_1+q_2+s_1+12}$$
$$\times \begin{bmatrix} P_{12}(n_1, q_1, n_2, q_2, n_3, s_1+n_4) \\ +P_{12}(n_1, q_1, n_2, s_1+n_3, q_2, n_4) \\ +P_{12}(n_1, s_1+n_2, q_1, n_3, q_2, n_4) \end{bmatrix}$$

G, S 共に常数なので，$q = s = 0$ で x の巾は $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 12$ である。n が２か零なので，x の巾が16の時は４個の n のうち，２個が２，他の２個が零である。このとき $n_1 = 0$ と，n_2, n_3, n_4 の１個が零の場合だけを計算して，$n_1 = 2$ の場合を省略しても，正しい値よりも約３%小さい値が求まるだけである。ξ_3 自体が ξ_0 に比較して小さいので（$\alpha = 0.2$，$\mu = 10$ の極端な場合でも ξ_0 の 1/10 以下である。)上記のような省略を行っても充分正しい結果が求まる。もっと省略して $n_1 = n_2 = 0$，$n_3 = n_4 = 2$ の場合だけ計算しても，正しい値より14%小さいだけで，普通は之で充分である。



第　2　図

第２図は $|\mu| < 10$, $\alpha = 0$, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20 の場合の無次元振動数$\sqrt{\lambda}$ の変化を示したものである。

$\alpha = 0$ は $B(x) =$ 常数の場合で，厳密解が求まり，次式であたえられる。

$$1 - \cos\left[\sqrt{\lambda + \frac{1}{4}\mu^2} + \frac{1}{2}\mu\right]^{\frac{1}{2}} \cosh\left[\sqrt{\lambda + \frac{1}{4}\mu^2} - \frac{1}{2}\mu\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$- \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{\mu}{2}\sin\left[\sqrt{\lambda + \frac{1}{4}\mu^2} + \frac{1}{2}\mu\right]^{\frac{1}{2}} \sinh\left[\sqrt{\lambda + \frac{1}{4}\mu^2} - \frac{1}{2}\mu\right]^{\frac{1}{2}} = 0$$

$\xi_4(x)$ までの5項をとると(両端固定，$\alpha = 0$)，誤差は1％以下である。

座屈荷重を求めるには，μ が大きいため急に収束が悪くなる。最も収束の悪い両端固定の場合は $\xi_{11}(x)$ までの12項をとって，初めて誤差が1％以下になる。この場合の計算値は下記の通りである。

$\alpha = 0\ \ :\mu = 39.48\ (= 4\pi^2)$

$\alpha = 0.1:\mu = 38.2$

$\alpha = 0.2:\mu = 37.0$

$\alpha = 0.3:\mu = 35.9$

(尚この論文は昭34.11月，仙台での，機械，精機両学会共催の講演会で発表したものに修正を加えたものである。)

(昭和35年9月10日受理)

文　献

(1)　芝　亀吉　物理常数表（岩波）p. 56.

Gatewood, B. E.; Thermal Stress (McGraw-Hill, 1957) pp 113—115.

Lateral Vibration of the Bar with Variable Bending Flexibility and Sectional Area

Shin TAKAHASHI

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering

The author solves by a successive approximation method the integral equation of the laterally vibrating bar which is built in at the one end and compressed axially. He seeks a solution of the equation in case that bending flexibility, density, sectional area and axial thrust are variable in the axial direction. Let the frequency be equal to zero, then the buckling load is obtained. As an example of numerical values, frequencies and buckling loads are given when both ends are built in and when the reciprocal of bending flexibility is $a+bx^2$, where a and b are constants, and x is the coordinate along the axis of the bar, and density, sectional area and axial thrust are constants. And finally, the variations of the frequencies and the buckling loads are obtained for a certain value of b/a.